Fête de la Science 2010 – Rallye Mathématique

Sudoku Bleu – réponses

1) Convenons de dire que les deux premières lignes (ou les deux dernières) forment une *bande* et que les deux premières colonnes (ou les deux dernières) forment une *pile*. Voici 8 familles de symétries « élémentaires » que nous pouvons utiliser (on obtient d'autres symétries en combinant celles-ci) :

1- permutation des bandes,
2- permutation des piles,
3- permutation des lignes dans une bande,
4- permutation des colonnes dans une pile,
5- renumérotation des symboles 1,2,3,4,
6- réflexion autour d'un axe de symétrie horizontal ou vertical,
7- réflexion autour de l'une des deux diagonales,
8- rotation.

2) Voici la grille remplie :

1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2

3) Oui, sans cette règle, on peut aussi proposer :

1	3	2	4
4	1	3	2
2	4	1	3
3	2	4	1

Donc cette règle est importante !

4) On peut en fait montrer qu'à symétrie près, il y a exactement 2 grilles distinctes. Voyons d'abord comment on peut faire pour montrer qu'il y a moins de 2 grilles distinctes (et donc moins de 3 !). On verra ensuite comment montrer qu'il y a 2 grilles distinctes qui ne peuvent pas se déduire l'une de l'autre par une symétrie.

Partons d'une grille quelconque. En utilisant la symétrie no. 5, on peut renuméroter les quatre chiffres du bloc en haut à gauche de sorte à obtenir :

Grille 1

1	2	*	*
3	4	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

Ensuite, pour compléter la première ligne, il y a deux possibilités :

Grille 2

1	2	3	4
3	4	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

ou

Grille 3

1	2	4	3
3	4	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

On voit que l'échange des deux dernières colonnes (symétrie no. 4) ramène le deuxième cas au premier, donc on peut supposer qu'on est dans le premier cas. De même, pour compléter la première colonne, quitte à échanger les deux dernières lignes on se retrouve avec la grille suivante :

Grille 4

1	2	3	4
3	4	*	*
2	*	*	*
4	*	*	*

Passons à la troisième case de la deuxième ligne. On peut y mettre un 1 ou un 2 et *nous allons montrer qu'on peut se ramener au cas où ce chiffre est un 1.* En effet, si on y met un 2, on peut compléter quelques cases supplémentaires, compte tenu des contraintes du jeu :

Grille 5

1	2	3	4
3	4	2	*
2	*	*	*
4	*	*	*

$\rightarrow$

Grille 6

1	2	3	4
3	4	2	*
2	*	4	*
4	*	*	*

$\downarrow$

Grille 8

1	2	3	4
3	4	2	*
2	1	4	*
4	*	1	*

$\leftarrow$

Grille 7

1	2	3	4
3	4	2	*
2	*	4	*
4	*	1	*

Alors, appliquons la réflexion par rapport à la diagonale nord-ouest / sud-est (no. 7) :

Grille 9

1	3	2	4
2	4	1	∗
3	2	4	1
4	∗	∗	∗

puis renumérotons 2 en 3 et 3 en 2 (sans changer 1 et 4) :

Grille 9

1	2	3	4
3	4	1	∗
2	3	4	1
4	∗	∗	∗

On voit qu'on se retrouve au stade de la grille 4 avec un 1 dans la troisième case de la deuxième ligne. Rappelons-nous qu'on avait à choisir entre un 1 et un 2 et qu'on voulait montrer qu'on peut se ramener à un 1 (phrase en italique plus haut) ; c'est fait. Finalement, en utilisant des symétries, on a ramené notre début de grille à :

Grille 10

1	2	3	4
3	4	1	∗
2	∗	∗	∗
4	∗	∗	∗

Ici, on peut compléter un peu :

Grille 11

1	2	3	4
3	4	1	2
2	∗	4	∗
4	∗	2	∗

On trouve maintenant deux possibilités :

Grille 12

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

ou

Grille 13

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Ces deux grilles ne se déduisent pas l'une de l'autre par une symétrie. Pour le démontrer, analysons un peu plus en détail nos symétries. Donnons-leur des symboles :

⮎	échange des deux bandes
⮎1	échange des lignes dans la bande 1
⮎2	échange des lignes dans la bande 2
⮏	échange des piles
⮏1	échange des colonnes dans la pile 1
⮏2	échange des lignes dans la pile 2
	renumérotation des symboles 1,2,3,4
$\diagdown$	réflexion autour de la diagonale NO-SE
$\diagup$	réflexion autour de la diagonale NE-SO
—	réflexion autour de l'axe de symétrie horizontal
|	autour de l'axe de symétrie vertical
↺	rotation $1/4$ tour dans le sens indiqué

Bien sûr, les autres rotations ($1/2$ tour, $3/4$ tour) s'obtiennent en itérant celle du tableau. Mais il est facile de voir que certaines de ces symétries sont superflues car elles peuvent être décomposées à l'aide des autres. Par exemple :

⮎1 s'obtient par la séquence ⮎ ⮎2 ⮎

⮏1 s'obtient par la séquence ⮏ ⮏2 ⮏

— s'obtient par la séquence ⮎ ⮎1 ⮎2

| s'obtient par la séquence ⮏ ⮏1 ⮏2

Un peu plus compliqué :

$\diagup$ s'obtient par la séquence — | $\diagdown$

↺ s'obtient par la séquence ⮎ $\diagup$ ⮏1 ⮏2

Finalement, il nous suffit de considérer les symétries suivantes

⮎ , ⮎2 , ⮏ , ⮏2 , $\diagdown$ et renumérotation

pour engendrer toutes les symétries. Ici, il devient difficile de ne pas formaliser un peu les choses. Notons X l'ensemble des grilles de Sudoku et G l'ensemble des symétries. En mathématiques, un tel ensemble de symétries est appelé un *groupe*. Notons H le sous-groupe engendré par les transformations

renumérotation , ⮎2 , ⮏2 , $\diagdown$.

Si on veut, on peut même observer que deux parmi les trois derniers générateurs suffisent, car

⮎2 s'obtient par la séquence $\diagdown$ ⮏2 $\diagdown$

mais il est commode de conserver ⤷2 dans notre boîte à outils. Le raisonnement que nous avons fait au début a montré que l'ensemble des grilles de Sudoku considérées aux symétries près *par des éléments de* H contient exactement deux éléments, les grilles 12 et 13. La question initiale étant de compter les grilles aux symétries près *par des éléments de* G, il reste à voir comment les deux symétries ⤷ et ⇊ agissent sur les deux grilles 12 et 13. Or on constate qu'elles n'ont pas d'action, c'est-à-dire que l'image de 12 est 12, et l'image de 13 est 13. Vérifions par exemple en détail le cas de ⤷ : pour cela on applique ⤷ puis des symétries de H par le procédé décrit au début pour revenir sur l'une des grilles 12 ou 13.

Pour la grille 12, après ⤷ il n'y a qu'à appliquer la renumérotation qui échange 1 et 2, d'une part, et 3 et 4, d'autre part :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

⤷

2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2

(12)(34)

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

et on retombe en effet sur la grille 12 de laquelle on est parti. Pour la grille 13, après ⤷ il faut renuméroter 1 en 4, 4 en 3, 3 en 2, 2 en 1 puis échanger les deux dernières lignes :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

⤷

2	3	4	1
4	1	2	3
1	2	3	4
3	4	1	2

(1432)

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

⤷2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

et on retombe sur la grille 13. La conclusion est que les grilles 12 et 13 ne sont pas échangées par l'action résiduelle de ⤷ et ⇊. En termes mathématiques, la relation d'équivalence induite par G sur X/H est triviale, si bien que

$$X/H \simeq X/G = \{ \text{ les grilles 12 et 13 } \}.$$

5) Il faut être astucieux pour trouver les bons endroits où regarder. Par exemple, les endroits (lignes, colonnes, blocs,) où se trouvent déjà beaucoup de cases remplies. Voici quelques indications pour commencer :

- dans le bloc situé bande 1, pile 3, où peut se trouver le 9 ?
- dans le même bloc, où peut ensuite se trouver le 5 ?
- dans la colonne 4, où peut ensuite se trouver le 7 ?

Etc.

Voici la grille remplie :

6	9	7	4	5	3	2	1	8
8	2	4	6	1	9	7	5	3
3	5	1	2	8	7	6	9	4
7	3	5	8	6	1	9	4	2
9	4	8	7	3	2	1	6	5
1	6	2	5	9	4	3	8	7
5	1	9	3	7	8	4	2	6
4	7	6	9	2	5	8	3	1
2	8	3	1	4	6	5	7	9